委托-代理问题(Ⅰ)：道德风险

在许多的经济活动中，个人不能或不愿自己采取行动，而雇佣其他人（代理人）代为采取行动。这就是委托-代理。但是，在一个委托-代理关系中，代理人常常有自己的且与委托人利益不一致的目标；由于代理人的行为难以详尽观察，则代理人就可能为了增进其私利而采取某些不利于委托人的行动。当然，委托人在聘用代理人之前，亦会料想到代理人的机会主义行为，因此他需要谋求与代理人订立某些合同来减轻将来的麻烦。这就是合约设计问题。合约设计问题也被称为委托-代理问题。

需要特别说明：可以纳入委托-代理分析框架的经济关系范围是非常广泛的。保险公司与投保人、股东和管理层、老板和员工、制造商和分销商、银行和借款人……不一而足。

委托-代理问题实际上是“机制设计”问题的特例。

委托-代理问题的基本模型包括三类：道德风险(隐蔽行动)问题、隐蔽信息问题、隐蔽行动和隐蔽信息混合模型。本部分讨论道德风险问题。

1．道德风险问题基本模型

考虑一个委托人雇佣一个代理人为其运作一个项目。

项目可观测利润设为p 。

代理人选择行动$e\in E$，E是所有可能行动的集合。e可以解释为努力水平的测度。经济学中最广泛研究的简单情况是，把e作为代理人努力水平的一维测度，即$E\subset \mathrm{R}$。更一般地，e可以是一个多维向量——比如代理人可以选择降低成本、花时间与客户打交道、设计更好的项目方案等多个维度上的努力。这样的情况下，对于M 个努力维度，有$E\subset \mathrm{R}^{\mathrm{M}}$。我们后面的模型中，将$e$视为努力水平选择[①]。

假设p 并不纯粹由e决定，这样委托人就无法通过p 对代理人的e做出完全推断。为此，不妨假设$p\in[\underline{p},\bar{p}]$与$e$随机相关，相关方式以条件密度函数$f(p\mid e)$表示；其中，对于所有的$e\in E$和所有的$p\in[\underline{p},\bar{p}]$，有$f(p\mid e)>0$，意思是说给定任何一种努力水平，任何利润都有可能实现。

1．1 仅考虑两种努力水平

我们先把注意力限制在两种努力水平的情况。$e\in\{e_L,e_H\}$。代理人选择e_L的负效用比选择e_H的负效用要小，但e_L给委托人带来的利润也比e_H的利润要小。这样，在委托人和代理人之间就有了利益冲突，委托人希望获得更多利润，而代理人却希望损失更小的效用。

进一步具体化，假设依赖于e_H的p 的条件（概率）分布一阶随机占优于依赖于e_L的p 的条件分布；即，

[①] 这里的努力应宽泛理解，不一定是付出多少劳动强度，也可包括诸多与努力水平无关的决策，比如选择更有利于或更不利于委托人的促销战略等。

$$F(p\mid e_H)\le F(p\mid e_L) \text{ [2]} \tag{1}$$

要求，式(1)在某些开集$\Pi\in[\underline{p},\overline{p}]$上严格成立（想想为什么？）。其含义是，委托人利润水平在代理人选择e_H时比选择e_L时要高，即

$$\int p\, f(p\mid e_H)\mathrm{d}p>\int p\, f(p\mid e_L)\mathrm{d}p \tag{2}$$

代理人追求效用最大化，他有伯努利效用函数$u(w,e)$，$u_w(w,e)>0$，$u_{ww}(w,e)\le 0$[3]，且对于所有的w有$u(w,e_H)<u(w,e_L)$。作为这种效用的一个特例，也是经常被经济学文献采用的效用函数形式是

$$u(w,e)=v(w)-g(e)\qquad v'(w)>0,v''(w)\le 0,g(e_H)>g(e_L) \tag{3}$$

假设代理人存在外部合约机会，可以给其带来$\bar{u}$的效用（即代理人保留效用为$\bar{u}$）。

委托人风险中立，追求项目的期望汇报最大化。（做这样的简化假设背后的思想是，委托人可能持有一个很好的多元化的资产组合，使得他可以分散项目风险）

1．1．1 努力水平可以直接观察的情况

由于努力可以直接观察，委托人就可以直接将努力水平e作为自己的决策变量（签约变量），在合约中直接指定对自己最有利的努力水平e。即，委托人对代理人的补偿报酬合约w是直接与代理人努力水平e绑定的，$w=w(e)$。委托人唯一需要考虑的约束是，自己指定的努力水平必须满足代理人的保留效用水平。

于是，委托人面临的合约设计问题可以写成如下规划问题：

$$\max_{e\in\{e_L,e_H\},w(e)}\int(p-w(e))f(p\mid e)\mathrm{d}p \tag{4}$$

$$s.t.\quad v(w(e))-g(e)\ge\bar{u}$$

可以判断约束条件是紧的[4]，因此取等号即可解出需付给代理人的工资水平：

$$w^*(e)=v^{-1}(\bar{u}+g(e)) \tag{5}$$

委托人问题转化为：

$$\max_{e\in\{e_L,e_H\}}\int(p-v^{-1}(\bar{u}+g(e)))f(p\mid e)\mathrm{d}p \tag{6}$$

由于这里假设$e\in\{e_L,e_H\}$，因此委托人只需要计算使上式最大的e就可以了。

> **命题 1.1.1** 在代理人努力水平可观察的委托-代理模型中，最优合约规定委托人努力水平为e^*使得$\int p\, f(p)\mathrm{d}p-v^{-1}(\bar{u}+g(e))$最大化，并支付代理人固定工资$w^*=-v^{-1}(\bar{u}+g(e^*))$。如果对于所有的$w$，有$v''(w)<0$，那么这就是唯一的最优合同。

1．1．2 努力水平不可以观察的情况

---

[2]随变量X一阶随机占优于随即变量Y，本来是要求$\mathbf{Pr}[X>z]\ge\mathbf{Pr}[Y>z]$，即$1-F(z)\ge 1-G(z)$，在文献中人们更习惯于写成$F(z)\ge G(z)$。在这里，$F(p\mid e_i)=\mathbf{Pr}[X<p\mid e_i]$，因此式(1)的意义是：给定任何一个利润水平$p$，则实现的利润小于给定$p$的概率，在$e_L$时比$e_H$时要大。或者说，选择$e_H$比选择$e_L$达到任何产量标准以上的概率都更高，这正是式(2)的含义。

[3] 这也表明代理人弱风险规避。

[4] 因为委托人希望给出最少的工资。

努力水平不可观测时，合同中就不能约定努力水平。即，努力水平本身不能作为合约的指标，委托人只能借助于其他可观测指标来设计合约。在我们的模型中，委托人唯一可观测和验证的指标是利润p。因此，合同w将依赖于p，$w = w(p)$。

下面我们分代理人风险中立和风险规避两种情况予以讨论。

■代理人风险中立

假设$v(w) = w$，则应用命题**1.1**可知，努力可观测时，最优的努力水平必须满足

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} \int p\, f(p \mid e) \mathrm{d}p - g(e) - \bar{u} \tag{7}$$

此时，委托人利润式为**(7)**式，代理人获得期望效用$\bar{u}$。

现在，我们来证明如下一个命题：

命题 1.1.2 在代理人努力水平不可观测、代理人风险中立的委托-代理模型中，一个最优合同所产生的最优努力选择以及代理人和委托人的期望效用都与努力可观测时一样。

证明：假设委托人提供如下报偿合同：$w(p) = a + bp$，即给予代理人基本报酬a（我们允许$a < 0$，则表示代理人给予委托人“罚款”或“租金”），并让代理人分享项目成果$b \in [0,1]$比例。

委托人最大化其预期报酬，即

$$\max_{a,b} \int (p - a - bp) f(p \mid e) \mathrm{d}p \tag{8}$$

委托人选择的(a, b)必须满足代理人参与约束(IR)，即

$$(\mathrm{IR}) \quad a + b \int p\, f(p \mid e) \mathrm{d}p - g(e) \geq \bar{u} \tag{9}$$

解释一下：b项后用了积分的形式，是因为签约时p是尚未实现，代理人只能根据预期的$E(p)$来作出决定。

同时，**委托人知道，给定任何合同w，代理人一定会在该合同下选择某个最大化其预期效用的努力水平**，即代理人会选择某个e^*以最大化

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} a + b \int p\, f(p \mid e) \mathrm{d}p - g(e) \tag{10}$$

令**(10)**有优化解，那么有$e^* = e(b)$，且$e'(b) > 0$（为什么？[5]），即代理人的努力随分享利润分额增加而增加。

委托人从最节约成本的角度考虑，只需要考虑使得式**(9)**在取e^*时成立，即

$$(\mathrm{IR}^*) \quad a + b \int p\, f(p \mid e^*) \mathrm{d}p - g(e^*) \geq \bar{u} \tag{11}$$

式**(11)**为紧条件，取等号，有

$$a^* = \bar{u} + g(e^*) - b \int p\, f(p \mid e^*) \mathrm{d}p \tag{12}$$

[5] 不妨向考虑连续函数一样直观分析，e的边际成本为$g'(e)$，边际收益为$b\left[\int p\, f(p \mid e) \mathrm{d}p\right]' > 0$，即$b$越大则努力的边际收益越高，均衡的努力水平就会提高。

将(12)代入(8)，有

$$\max_{b}\int\left[p-\left(\bar{u}+g(e^{*})-b\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p\right)-bp\right]f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p$$

上式也可改写为：

$$\max_{b}\int[p-bp]\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p-\left(\bar{u}+g(e^{*})-b\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p\right)$$

$$=\max_{b}\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p-b\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p+b\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p-\left(\bar{u}+g(e^{*})\right)$$

$$=\max_{b}\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p-\left(\bar{u}+g(e^{*})\right) \tag{13}$$

式(13)的优化应考虑$e^{*}=e(b)$且$e'(b)>0$。如果更高的努力能使得式(13)更大（即委托人希望代理人努力工作），那么就应选择尽可能大的b，$b^{*}=b^{\max}=1$。从而

$$a^{*}=-\left[\int p\,f(p\mid e^{*})\mathrm{d}p-\left(\bar{u}+g(e^{*})\right)\right] \tag{14}$$

请注意，a^{*}竟然刚好是委托人预期回报的相反数。这个结果有一个非常好的经济解释，即：委托人将项目以其预期回报的价值出售给了代理人；而代理人也完全享有项目的利润($b^{*}=1$)。

因此，代理人风险中立时候，$w=a+p$ 是一个最优合同。在最优合同中，代理人得到效用$\bar{u}$，委托人得到预期回报如式(13)。与努力水平可观察比较，可发现代理人、委托人此时各自的效用与努力水平完全可观察的情况一样。**QED**

实际上，我们的证明中忽略了一个问题，即：如果委托人并不希望代理人努力呢？这个问题很容易，大家可以检验$w=a+p$ 仍是一个最优合同。这表明，如果代理人风险中立，则委托人总可以通过出售项目给代理人获得与努力可观察时一样的回报，只不过代理人承担了全部风险。

■代理人风险规避

如果代理人风险规避（这是更符合现实的假定），则问题就更复杂，也更有趣。

令委托人给代理人的报偿合同为$w(p)$，委托人当然希望给予代理人最小的$w(p)$，但是却要遭受到代理人参与约束和激励约束。即委托人实施对任何努力水平为e的激励，需要解决下列最小化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{w(p)}\int w(p)f(p\mid e)\mathrm{d}p\\ s.t.\quad&\int v(w(p))f(p\mid e)\mathrm{d}p-g(e)\geq\bar{u}\qquad\text{(IR)}\\ &e\in\arg\max_{e}\int v(w(p))f(p\mid\tilde{e})\mathrm{d}p-g(\tilde{e})\qquad\text{(IC)}\end{aligned} \tag{15}$$

这里，IR 是个人理性约束(参与约束)，它表明，给出的工资合同，应使得代理人接受合同的净预期效用不低于其保留效用。IC 是激励兼容约束，它表明最小化支出的工资必须在该工资合同可确保代理人选择委托人所希望实施的努力水平条件下决定。简单地说，IC 条件保证了代理人选择委托人所希望的努力水平，因为选择那个努力水平对代理人本人是最有利的。

代理人有两种努力水平e_L和e_H。委托人可以任意选择一种想实施的努力水平来设计其合同。

首先考虑委托人希望实施e_L的情况。

那么，委托人应使IC条件中代理人选择$e=e_L$。事实上，一种最简单的合约是支付$w=c$的固定工资，就可以使得代理人必选择e_L（因为此时代理人最大化其效用要求e尽可能小）；那么c究竟应

是多少呢？这是需要考虑c刚好满足代理人参与约束 IR，不难得到$c = v^{-1}(\bar{u} + g(e_L)) = w^*$。

于是，我们有以下命题：

命题 1.1.3 希望代理人不努力的合约设计是相当简单的，不需要考虑其激励约束，只需要考虑满足其参与约束的固定工资就可以了。

现在来考虑委托人希望实施e_H。

此时，式**(15)**中约束 **IC** 的条件变化为

$$(\mathrm{IC_H})\quad \int v(w(p))f(p\,|\,e_H)\mathrm{d}p - g(e_H) \geq \int v(w(p))f(p\,|\,e_L)\mathrm{d}p - g(e_L) \tag{16}$$

这个条件之所以得到，是因为我们考虑的努力水平是离散的情况。这个式子的经济意义是，代理人选择努力得到的净预期效用不低于选择不努力的净预期效用（因此他将选择努力e_H）。

令$g \geq 0$和$m \geq 0$为约束 IR 和 $\mathrm{IC_H}$ 的拉格朗日乘子，那么在每一$p \in [\underline{p}, \bar{p}]$，$w(p)$必须满足如下 Kuhn-Tucker 一阶条件[⑥]：

$$-f(p\,|\,e_H) + g v'(w(p)) f(p\,|\,e_H) + m\left[f(p\,|\,e_H) - f(p\,|\,e_L)\right] v'(w(p)) = 0 \tag{17}$$

或者

$$\frac{1}{v'(w(p))} = g + m\left[1 - \frac{f(p\,|\,e_L)}{f(p\,|\,e_H)}\right] \tag{18}$$

在这里，先证明在具有$e = e_H$问题式**(15)**的任何解中，g 和m 为正。

引理 1.1.1：在具有$e = e_H$问题式(15)的任何解中，$g > 0$，$m > 0$。

证明：假设$g = 0$，因为$F(p\,|\,e_H)$一阶随机占优于$F(p\,|\,e_L)$，所以，一定存在一个利润水平开集$\Pi \subset [\underline{p}, \bar{p}]$，对于所有的$p \in \Pi$，使得$\dfrac{f(p\,|\,e_L)}{f(p\,|\,e_H)} > 1$。但是，若$g = 0$，条件**(18)**意味着对于上述任意的$p$（注意$m \geq 0$），有$v'(w(p)) \leq 0$。而这是不可能的。所以，$g > 0$。

如果$m = 0$，那么式**(10)**意味着应支付的工资$w(p)$将是常数（固定工资），但固定工资下代理人必选择e_L，$\mathrm{IC_H}$条件无法满足。因此$m > 0$。**QED**

引理 **1.1.1** 实际上告诉我们，两个约束等式都是成立的（即使条件两个条件都是紧的）。

更进一步，引理 **1.1.1** 可以帮助我们推断最优报偿计划的形式特征。譬如说，如果固定工资$\hat{w}$满足$\dfrac{1}{v'(\hat{w})} = g$，那么根据式**(18)**，有

$$w(p) > \hat{w} \quad \text{如果} \quad \frac{f(p\,|\,e_L)}{f(p\,|\,e_H)} < 1$$

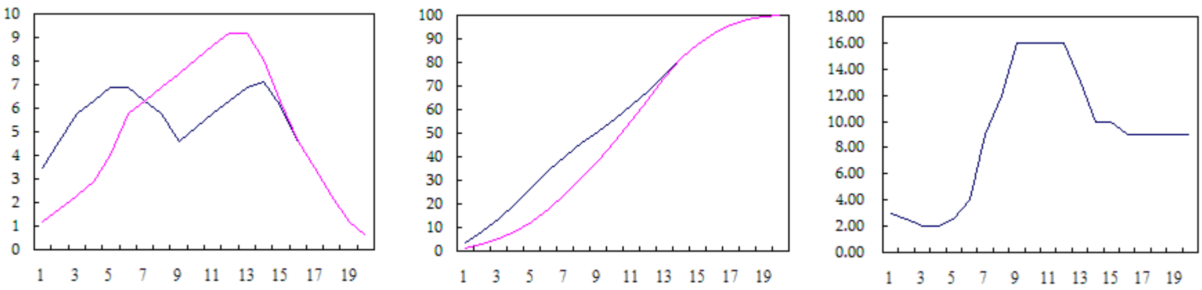
---

⑥ 问题式(15)本身可能并不是一个凸规划问题，但是考虑到$v(w)$为凹，或者说$w = v^{-1}(\cdot)$为凸，目标可视为$\int v^{-1}(v)f(p\,|\,e_H)\mathrm{d}p$ 是凸的，而约束条件则成为线性的。Kuhn-Tucker 条件就成为重新定义的问题的最小化的充要条件。

$$w(p) < \hat{w} \quad \text{如果} \quad \frac{f(p \mid e_L)}{f(p \mid e_H)} > 1$$

这种关系非常直观。在似然比 $\frac{f(p \mid e_L)}{f(p \mid e_H)} < 1$ 时，即结果 p 在 e_H 下比 e_L 下出现概率更大，此时最优报偿计划将支付比固定工资 $\hat{w}$ 高的工资。类似地，在 e_L 时更可能出现的结果，它将支付低于 $\hat{w}$ 的工资。更深一层的经济意义在于，为了确保代理人选择努力 e_H，我们实际上对 e_H 下更可能出现的结果支付了更高的报酬，而对 e_L 下更可能出现的结果支付了更低的报酬。或者说，委托人设计的合同基于 p 的值来确定报酬，而又由于同样的 p 值在不同努力水平下具有不同的出现概率，从而刺激了代理人选择 e_H。

有必要特别说明，按照这样一种思路设计报酬合同，最优的报偿合同中，报偿在利润上不必单调递增。这是一个乍看起来令人惊讶的结论！但事实就是如此，显然具有激励结构的报酬合同设计，其激励效应是来自于同样的 p 在不同努力水平下出现概率的差异，而不是来自利润 p 本身的增长！要使报酬随利润递增，必须是似然比 $\frac{f(p \mid e_L)}{f(p \mid e_H)}$ 在 p 上递减。也就是说，努力 e_H 下得到某个利润 p 的可能性相对于 e_L 下得到这个 p 的可能性，必须随着 p 增加而增加。这个特征被称为**单调似然比特征**（Milgrom,1981），一阶随机占优并不必定包含这个特征。比如下图中的情形，一阶随机占优是满足的，但是单调似然比并不成立。



(1) 概率密度　　　　　　　　(2)概率分布　　　　　　　　(3)最优工资

图：一个违反单调似然比特征的例子

说明：图中红线对应努力水平 e_H，蓝线对应努力水平 e_L。从概率密度可以看出，高努力水平使得高产量以更高的频率（密度）出现（表现为密度右偏），低努力则低产出更容易出现（表现为密度左偏）；概率分布（累计频率）可发现高努力对应在低产出的区域始终低于低努力出现的累计概率（频率），一阶随机占优是得到满足的。最优工资合同是针对每个产量决定一个工资，结果可发现，在概率密度蓝线高于红线的部分工资低于固定工资，蓝线低于红线的部分工资高于固定工资；蓝线与红线重合的部分，工资就是固定工资。代理人得到的工资将是不确定的，他只能根据(3)给出的工资分布以及红线概率密度来计算预期工资率（这个期望工资率减去代理人因额外努力付出的成本，将等于以蓝线概率密度和最优工资分布来计算的预期工资率）。

式**(18)**意味着，最优合同不太可能采取简单（比如线性）的形式。最优工资方案 $w(p)$ 是各种不同利润水平所包含的信息内容的一个函数（通过似然比）。在大多数问题中，$w(p)$ 与 p 的相关方式并不简单。

委托人激励代理人努力 e_H 的成本有什么变化？在努力可观测的时候，实施 e_H 所要求的固定工资是 $w^*_{e_H} = v^{-1}(\bar{u} + g(e_H))$。但是现在，由于在代理人工资中引入了变化（承担了一定风险），因此委托人对风险规避的代理人需要支付更高的期望工资才能保证代理人获得效用 $\bar{u}$。为了正式地考察这个结论，请注意：$E[v(w(p)) \mid e_H] = \bar{u} + g(e_H)$，且 $v''(\cdot) < 0$，（那么根据凹的效用函数定义）有 $v(E[w(p) \mid e_H]) > \bar{u} + g(e_H)$。结果是，努力不可观测使得委托人实施努力水平 e_H 的代价增加了。

有了上述分析，最后就可以讨论委托人究竟应实施e_L还是e_H。这个问题很简单了，委托人只需要比较两种努力水平下对应的期望利润和期望工资支付的差异就可以了，即考虑如下问题：

$$\Delta p = \int (p - w_{e_H}) f(p \mid e_H) \mathrm{d}p - \int (p - w_{e_L}) f(p \mid e_L) \mathrm{d}p \tag{19}$$

根据前面的分析，我们知道，实施e_L所需要的工资支付与努力可观察的情况恰好相同，而实施e_H所需要的工资则比努力可观察的情况要多。因此，在这个模型中，努力不可观察提高了实施e_H的代价，但并未提高实施e_L的代价。因此，对于委托人来说，其提供合同的选择是在激励的代价和激励的收益之间权衡：他总是可以象完全信息（努力可观察）中那样实施e_L；但是要实施e_H则有额外的代价，这个额外的代价与努力带来收益增进若能平衡，那么就可以选择让代理人承担风险的激励方案，否则就应选择让代理人不承担风险的无激励方案。

这些观点可以总结如下：

命题 1.1.4 在代理人努力不可观察的委托-代理模型中，若委托人风险规避，并面临两种可能的努力选择，那么实施e_H的努力必须有报酬合同满足条件(18)，它给代理人的期望效用为$\bar{u}$；委托人必须支付比努力可观测情形更高的期望工资。实施e_L的最优报偿合同则是支付与努力可观察情形一样的固定工资。当e_H是努力可观测情形的最优努力水平时，不可观测性回导致福利损失。

1．2 多种努力水平

考虑比两种努力水平更复杂的情况。

多水平离散的情况

比如，$e \in \mathrm{E} \equiv \{e_L, e_M, e_H\}$。

对于这个问题的考虑，与考虑两种努力水平一样，我们可以把委托人的问题分成几个部分来回答：

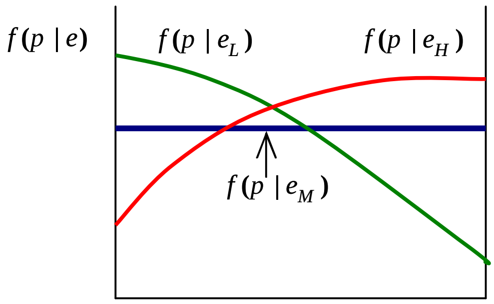
a) 可诱导的是何种努力水平？

b) 对于每种可诱导的努力水平，最优合同是什么？

c) 考虑最优合同，何种努力水平$e \in \mathrm{E}$对于委托人是最优的？

多种努力水平情况下，以上问题的每一部分都很复杂。这种复杂性体现在两个方面：

第一方面：激励兼容约束的满足。在两种努力水平时，e_L总可以通过固定工资来诱导，而e_H总可以通过更高的激励来诱导，激励兼容是容易满足的。但三种或更多努力水平时候，某些努力的水平的激励兼容约束不一定能满足。如图，要设计激励机制去诱导给定的e_M是不可能的，因为对于任何$w(p)$，代理人总是偏好e_L或e_H胜于e_M。



图：$E = \{e_L, e_M, e_H\}$的分布密度函数，努力选择e_M可能得不到实施。

第二方面：实施努力选择e的最优合同必须解决下面的优化问题：

$$\min_{w(p)} \int w(p) f(p \mid e) dp$$

$$s.t.\quad \text{(IR)}\quad \int v(w(p)) f(p \mid e) dp - g(e) \geq \bar{u}$$

$$\text{(IC)}\quad e \in \arg\max_{e \in E} \int v(w(p)) f(p \mid \tilde{e}) dp - g(\tilde{e})$$

如果有K个可选行动，那么上述问题的 IC 条件就会由$K-1$个激励约束组成[因为，所诱导的努力水平在给定合同下必须优于$K-1$个不希望诱导的努力水平]。上述情况下，选择一个变量最大化代理人所获得的依赖于p 的效用函数$\bar{v}(p)$，则我们面临的问题是具有K个线性约束的凸目标函数（进一步可参见 Grossman 和 Hart，1983）。在多个条件约束的时候，为了简化分析过程，我们可以尝试寻找那些是紧条件，哪些是松弛条件，然后令紧条件取等号解出规划问题，再去验证得到的解是否满足松弛条件就可以了（Laffont 和 Martimort，2002）。

但是，如果E是一个连续的可能的行动集合，如$\mathrm{E} \in [0, \bar{e}] \subset \mathrm{R}$，则我们有无限个激励约束。这种情况的有时可运用一个技巧：用一阶条件代替 IC 约束。这种方法因此也被称为一阶条件方法。例如，如果努力水平e是一维连续变量，那么代理人的一阶条件为：

$$\int v(w(p)) f_e(p \mid e) dp - g'(e) = 0$$

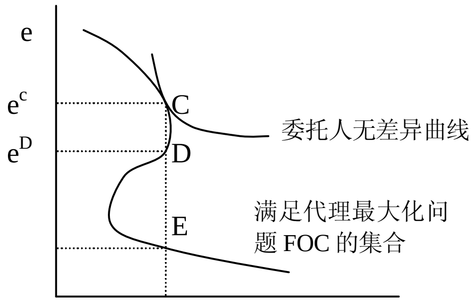
其中，$f_e(p \mid e) = \dfrac{\partial f(p \mid e)}{\partial e}$，如果用上式代替 IC 约束进行求解，那么可得到类似于式(18)两努力水平的最优解条件：

$$\frac{1}{v'(w(p))} = l + m\left[\frac{f_e(p \mid e)}{f(p \mid e)}\right] \tag{19}$$

比值$\dfrac{f_e(p \mid e)}{f(p \mid e)}$对$p$ 的单调递增的条件正好是单调似然比特征的微分版本（为什么？）。方程(19)蕴涵着这样的意义：当存在一个真正的道德风险问题时，与对称信息情况相关的最优风险分摊的条件不再得到满足，即工资取决于得到的结果。而工资对结果的依赖程度取决于函数$\dfrac{f_e(p \mid e)}{f(p \mid e)}$的形式。

假设$\dfrac{f_e(p \mid e)}{f(p \mid e)}$递增，则式(19)右边递增，左边也必须递增。因为$v_w(w(p)) > 0$，$v_{ww}(w(p)) < 0$（代理人风险规避），这样的效用函数下，为了保证$v_p(w(p)) > 0$，$v_{pp}(w(p)) < 0$，要求$w(p) > 0$，即更好的结果对应更高的工资。似然比递增的条件意味着，更高的努力结果更好。这一结论与两种努力水平的情况一样。

但是，一阶方法的使用，并非是没有问题的。一阶条件得到代理人的最优努力是一系列的点，这些点与报酬合同有关，但这些点却并不一定与报酬合同表现出函数关系（图），因此有时候用一阶方法并不适用。只有在良好的假设，比如要求代理人预期效用函数关于e是凹的（当然，我们一般假设它是凹的，但是还需注意到e本身会改变结果的分布，使这个凹不一定满足），附加某些约束下（比如单调似然比成立）则一阶条件可以是充分的条件。



1．3 Holmstrom 和 Milgrom 模型

Holmstrom 和 Milgrom（1987）提出的委托-代理模型是一个适当简化的一维连续变量一般化模型，用参数化方法表述。这个模型在许多文献中被采用。所以这里专门给予介绍⑦。

设a为一维变量，$p = a + q$，$q \sim N(0, s^2)$为外生不确定因素。故有

$E[p] = a, \mathbf{var}(p) = \mathbf{var}(a) + \mathbf{var}(q) = s^2$

假设委托人风险中性，代理人风险规避。

考虑线性合约⑧：$s(p) = a + bp$

当$b = 0$为固定工资，当$b = 1$则代理人承担了全部风险。

委托人风险中立，则给定$s(p) = a + bp$，委托人的期望效用为

$$E[v(p - s(p))] = v[-a + (1 - b)a]$$

因为v'为常数（风险中立），不妨设$v(w) = w$，w为委托人收入。委托人期望效用等于期望收入：

$$E[v(p - s(p))] = -a + (1 - b)a$$

代理人效用函数具有不变的绝对风险规避特征：

$r = -\dfrac{u''}{u'}, r > 0$为代理人绝对风险规避度。令$w$为代理人实际货币收入，则

$\dfrac{d\ln u'}{dw} = -r$

$\ln u' = -rw + B$，B为常数，

$u' = e^B e^{-rw}$

$u = -\dfrac{e^B}{r} e^{-rw} + c$，$c$为常数。

不妨再设$\dfrac{e^B}{r} = 1, c = 0$

则$u = -e^{-rw}$

进一步简化，设$C(a)$为等价货币成本，具体为

$C(a) = \dfrac{ba^2}{2}$，　$b > 0$为成本系数；

代理人实际收入为：

---

⑦ 当然，过于特殊的假定也使得线性模型在一定程度上失去了吸引力（Wolfsteiter，2003，p288-290）

⑧ 当委托人和代理人都具有不变的绝对风险规避度时，最优合约是线性的（蒲勇健：《博弈论与经济模型》，p260-267,p283;）

$$w = s(p) - C(a) = a + b(a+q) - \frac{b}{2}a^2 \qquad (*)$$

下面引入确定性的等价概念。

定义：若 $u(x) = E[u(w)]$，w 为随机收入，$u(x)$ 为效用函数，则称 x 为 w 的确定性等价收入。

可以推导如下命题：

(*)式中当 w 为正态分布时，效用函数 $u = -e^{-rw}$ 中 w 的确定性等价收入 x 与期望收益有如下关系：、

$E[w] - x = \frac{1}{2} rbs^2$，[⑨]

这里 $\frac{1}{2} rbs^2$ 称为代理人风险贴水或风险成本，即代理人放弃 $\frac{1}{2} rbs^2$ 的收入而获得确定性收入可以确保同样的效用，故 $\frac{1}{2} rbs^2$ 也是代理人购买保险的价格。

由此，代理人最大化其效用 $E[u(w)] = -E[e^{-rw}]$，也等价于最大化如下确定性收入：

$$x = a + ba - \frac{1}{2} rb^2 s^2 - \frac{b}{2}a^2$$

于是，代理人的参与约束可表示为

$$(IR) \qquad a + ba - \frac{1}{2} rb^2 s^2 - \frac{b}{2}a^2 \geq \bar{w}$$

如果信息是完全的

则不需要考虑 IC 条件，委托人问题为：

$$\max_{a,b,a}\{-a + (1-b)a\}$$

$$\text{s.t. (IR)} \quad a + ba - \frac{1}{2} rb^2 s^2 - \frac{b}{2}a^2 \geq \bar{w}$$

约束式为紧条件，取等号得到

$$a = \bar{w} - ba + \frac{1}{2} rb^2 s^2 + \frac{b}{2}a^2$$

代入目标式，得到

$$\max_{a,b,a}\{a - \frac{1}{2} rb^2 s^2 - \frac{b}{2}a^2 - \bar{w}\}$$

因为 $\bar{w}$ 乃外生给定，规划解为 $b^* = 0, a^* = \frac{1}{b}$

代入 IR 条件，得到

$$a^* = \bar{w} + \frac{b}{2}(a^*)^2 = \bar{w} + \frac{1}{2b}$$

这就是最优合约。

对最优合约的讨论：

---

⑨ 推导过程可参见某些有讨论风险规避的教材，比如（）。

如果信息不完全（努力不可观察和证实）

则还需要考虑激励约束。此时单调似然比可得到满足，所以可直接用一阶方法。

代理人试图最大化其预期赢利等于最大化其确定性等价收入$a+ba-\frac{1}{2}rb^2s^2-\frac{b}{2}a^2$，一阶条件为

$$a^*=\frac{b}{b}$$

委托人问题变化为

$$\max_{a,b,a}\{-a+(1-b)a\}$$

s.t. (IR) $a+ba-\frac{1}{2}rb^2s^2-\frac{b}{2}a^2\geq\overline{w}$

(IC) $a=\frac{b}{b}$

由 IR 条件，得到$a=\overline{w}-ba+\frac{1}{2}rb^2s^2+\frac{b}{2}a^2$，将此与 IC 条件一起代入目标函数，得到

$$\max_{b}\left[\frac{b}{b}-\frac{1}{2}rb^2s^2-\frac{b}{2}\left(\frac{b}{b}\right)^2-\overline{w}\right]$$

FOC：$\frac{1}{b}-rbs^2-\frac{b}{b}=0$，得到

$$b^{**}=\frac{1}{1+brs^2}$$

$$a^{**}=\frac{1}{b(1+brs^2)}<\frac{1}{b}=a^*$$

[评论]：

1．4 理论应用

1．4．1 经理激励问题

为什么经理人的工作并不得到固定报酬，而是与其业绩绑定在一起？一个可能的原因在于，一旦雇佣经理的合约签订，则经理有卸责的道德风险。

模型：考虑公司股东聘任经理经营企业，股东风险中立；经理风险规避，有外部保留效用$\overline{U}$。经理的效用函数如下：

$$U(w,e)=u(w)-g(e)$$

其中w是工资，e是努力水平。假设$u'>0, u''<0$，$g'>0, g''>0$，$v(0)=0$，$v'(0)=0$，这样的假设保证我们得到一个内点解。

股东的利润函数形式如下：

$$p(x,w)=px-cx-w$$

p 为竞争市场销售价格，乃常数。$x\in X$ 是销售量，c 为产品的不变边际成本。x 取决于经理的努力和随机因素影响，假设销售量在各努力水平下的分布密度为 $f(x|e)$。

如果努力可观察，则股东的问题是直接选择一个 e^* 写入合同，并强制支付固定工资，e^* 是如下问题的解：

$$\max_e \int_{x\in X}(px-cx-w(x))f(x|e)dx$$

$$s.t.\quad \int_{x\in X}u(w(x))f(x|e)dx-g(e)\geq \bar{U}$$

通过约束条件，可得到 $w^*=u^{-1}(\bar{U}+v(e))$ 代入目标式，即

$$\max_e \int_{x\in X}(px-cx)f(x|e)dx-u^{-1}(\bar{U}+g(e))$$

故最优努力满足：

$$\int_{x\in X}(px-cx)f_e(x|e)dx-\frac{g'}{u'(u^{-1}(\bar{U}+g(e)))}=0$$

即，经理努力的预期边际收益等于其努力的边际成本。

如果经理的行为不可观察或证实，则无法把努力水平写入合同，股东只要将报酬与业绩而不是努力水平绑定，此时股东问题变化为：

$$\max_e \int_{x\in X}(px-cx-w(x))f(x|e)dx$$

$$s.t.\quad \int_{x\in X}u(w(x))f(x|e)dx-g(e)\geq \bar{U}\qquad \textbf{(IR)}$$

$$\int_{x\in X}u(w(x))f_e(x|e)dx-v'(e)=0\quad \textbf{(IC)}$$

其中我们已经运用了一阶方法，假设它是有效的。如果用 l 表示参与约束乘数，m 为激励约束乘数，那么关于最优工资的一阶条件为：

$$-f(x|e)+l\,u'(w(x))f(x|e)+m\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}$$

从中得出：

$$\frac{1}{u'(w(x))}=l+m\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}$$

回忆我们曾声称，若 $\frac{f_e(x|e)}{f(x|e)}$ 递增，则经理报酬随销量递增。似然比度量的是由销售量推断代理人的行为是否如所预期的能力。似然比关于 x 递增是说，销售量越大，销售量作为信号表明经理努力水平越可能高。例如，销售量采取形式 $x=e+e$，其中 $e\sim N(0,s^2)$，这一特定就可得到满足。

1．4．2 信贷配给

一家厂商，在既定利率下，即使愿意支付当前利率，但是也得不到其想要的全部货币，我们称该厂商信贷受到配给。信贷市场配给可能是道德风险的结果，或者说道德风险导致了信贷配给。如下模型可以说明这一思想。

考虑一个商人，可以在项目a,b之间选择，两个项目需要的投资均为 I，对于$i=a,b$，每个项目产生的结果O_i是不确定的，为

$$O_i=\begin{cases}X_i>0, & \text{with probability } p_i\\ 0 & \text{, with probability } 1-p_i\end{cases}$$

假设项目是低风险的，且预期价值更有利可图，尽管项目b在成功时获得收益更大，即我们假设：

$$p_aX_a>p_bX_b,\ 1>p_a>p_b>0,\ X_a<X_b$$

厂商为了支付 I 必须借钱。总利息用R来表示，它只在项目成功时支付，也就是说银行不能从一家破产的厂商那里得到支付。

当项目i启动，该厂商的期望赢利为：

$$U(R,i)=p_i(X_i-R)$$

而银行的预期利润为：

$$\Pi(R,i)=p_iR-I$$

换句话说，我们假设双方都是风险中立的。

在对称信息下，从银行的立场看，最优合约是要求$R=X$，且合约上要求只能完成项目a，在此情况下$U(X_a,a)=0$，这样厂商贷款的所得就不低于其不贷款所得。这里不存在信贷配给。

但是，信息有可能是不对称的。银行观察不到企业的行动（选择 **a** 还是 **c?**），企业存在道德风险，一旦支付固定的利息，厂商会选择带给它最大利润的项目。给定R，厂商投资a的条件是当且仅当：

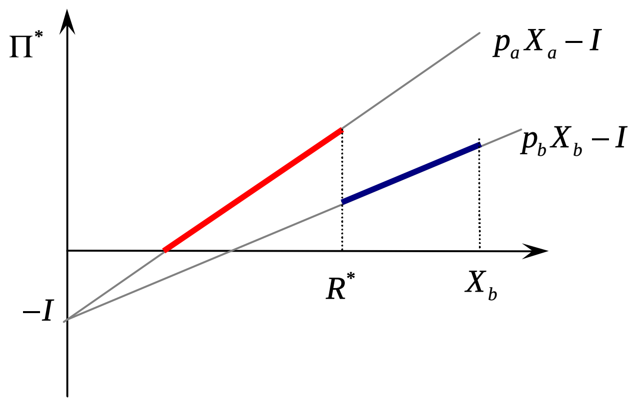
$$p_a(X_a-R)\geq p_b(X_b-R)\Leftrightarrow R\leq\frac{p_aX_a-p_bX_b}{p_a-p_b}=R^*$$

即，如果$R\leq R^*$，该厂商会选择项目a，而在$R>R^*$时，他会偏好于b。

给定项目的选择取决于R，银行的利润由下式给出：

$$\Pi^*(R)=\begin{cases}p_aR-I & \text{if } 0\leq R\leq R^*\\ p_bR-I & \text{if } R^*\leq R\leq X_b\end{cases}$$

X_b是承担项目b时该厂商愿意支付的最大数量。该（分段）函数形式如下：



假如银行处于垄断地位，银行总是选择R最大化其利润，因此，如果下面条件满足：

$$p_aR^*>p_bX_b \qquad \textbf{(*)}$$

银行就选择$R=R^*$，此时$\Pi^*(R^*)>\Pi^*(X_b)$。

如果

$$p_a R^* < p_b X_b \qquad \textbf{(**)}$$

则银行选择 $R = X_b$。

为了分析信贷配给问题，假设银行能贷出的货币总量为 L， $I \le L \le NI$ 。 N 表示厂商的数目。考察**(**)**式，其中最优利率为 $R = X_b$，此时厂商利润为

$$U(X_b, b) = p_b(X_b, -X_b) = 0$$

这个式子表明，这一利率下厂商借钱不借钱没有差异，所以不存在信贷配给。

然而，在（*）式中，厂商的利润为

$$U(R^*, a) = p_b(X_a - R^*) > 0$$

即所有厂商都要申请贷款。所以，要求贷款的资金总额为 NI 会超过可贷款资金总和，结果就出现贷款配给，有些企业虽然愿意支付市场利率，但是得不到贷款。