Chap2 劳动量、产出和消费量

—— 一个人的“宏观”经济模型

董志强

d_zq@163.com

Spring,2008

本章要研究的问题

在本章，我们考虑一种最简单的“宏观”经济。这个经济由一个人组成，他必须劳动供给自己的消费，即自给自足。没有其他人，也没有市场，所以他不能与别人交易；货币也是没有必要的。这个一个没有交换、没有货币的简单经济中，这个人如何决定他的劳动和闲暇时间？财富的变化对他的决策会有什么样的影响？

2．1 模型基本假设

鲁滨逊漂流到一个荒岛上，他必须自己劳动养活自己。我们假设：

- 他是这个荒岛经济中唯一的生产者和消费者；
- 劳动是唯一的生产投入要素，暂不考虑资本投入。这个假设等同于说劳动投入是有代价（机会成本）的，而资本投入是没有机会成本的——当劳动是稀缺资源而资本不稀缺，这个假设就可以成立；
- 只生产和消费一种物品；
- 产品无法储存，要么当期消费掉，要么腐烂掉，因此经济中不会有存货；

2．2 经济行为模式

生产活动（生产技术）

鲁滨逊的生产活动（生产技术）用如下函数表示：

$$y_t = A_t f(l_t) \tag{2.1}$$

y 表示产出；l 表示劳动投入量（可理解为劳动时间投入）；f 是既定技术下劳动的投入产出关系；A_t 是(生产函数的)技术系数；t 是时期指标，在不引起歧义时，t 可以省略。

现在对函数式(2.1)做出如下一些假设：

$$f' > 0, f'' < 0, f(0) = 0, f(+\infty) = +\infty$$

这样的假设经济意义是：劳动投入越多，则产出越多；但劳动边际产品的价值递减；如果不投入劳动就没有产出；持续投入劳动带来的总产量总是增加的（其实，这个假设可以适当放宽：劳动力是一种有限的稀缺资源，只要在有限的劳动力资源范围内，总产量不断增加就可以了）。在这样的假设下，生产函数形状如图 2-1；劳动边际产品曲线如图 2-2。

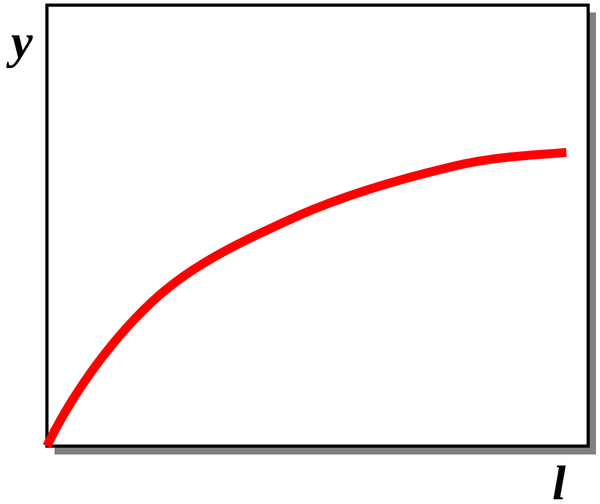


图 2.1 生产函数曲线

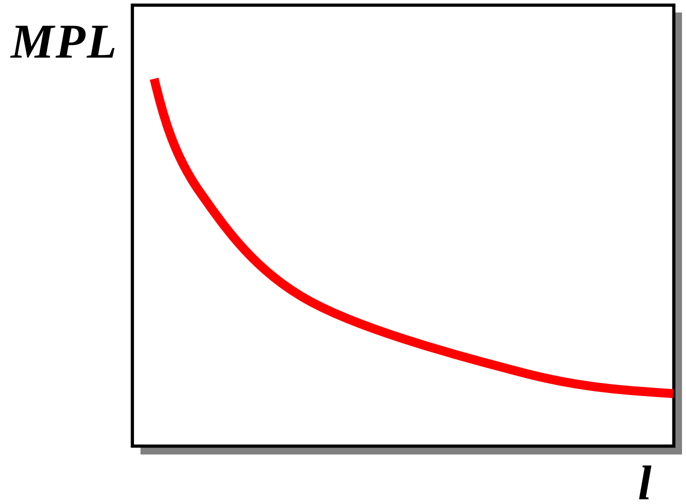


图 2.2 劳动边际产品曲线

技术进步对给定劳动投入量$l>0$的产出和边际产品有什么影响？由于

$$\frac{\partial y}{\partial A} = f(l) > 0$$

$$\frac{\partial MPL}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right) = \frac{\partial}{\partial A}\left(Af'(l)\right) = Af'(l) > 0$$

因此，技术进步将提升总产量、提升劳动边际产量。一次技术进步对产量

和劳动边际产量的影响如图 2.3 和 2.4。

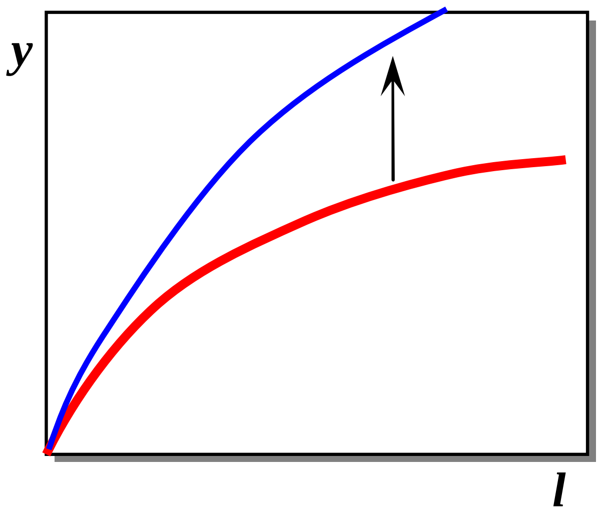


图 2.3 生产函数曲线

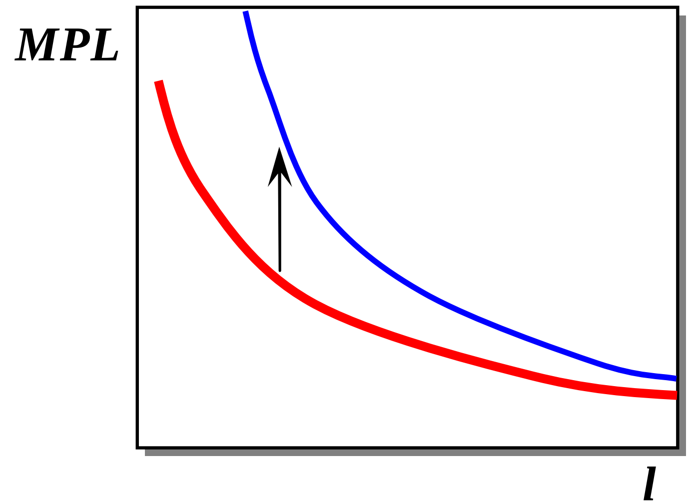


图 2.4 劳动边际产品曲线

说明：红线是技术进步前，蓝线是技术进步后。技术进步提高了劳动的产量和边际产量

ÿ 思考：在图 2.3 中，为什么技术进步带来的产量增加量随劳动投入量越多增加得越多（开口越来越大）；在图 2.4 中，为什么技术进步带来的劳

动边际产量随劳动投入量越多增加得越少（开口越来越小）？这样的结果，与什么样的假设有关？

消费活动（消费和闲暇偏好）

生产是鲁滨逊的一类活动，消费是鲁滨逊的另一类活动。鲁滨逊的消费集中有两种可选的元素：物品以及闲暇。

一个的时间使用基本上可以分为三种用途：工作时间、必要的休息时间，以及娱乐自己的时间。一般来说，必要的休息时间可视为一个固定的时间支出，从而个人可支配的时间主要由工作和闲暇构成。或者说，闲暇就是一个人除去必要休息时间和工作时间剩下的娱乐自己的时间。

鲁滨逊一天只有 24 小时时间，除去必要的休息时间 8 小时，还有 16 小时可支配时间。所以，在任何时期t，他可支配的时间是固定的，设为常数h_t，其中工作时间花去l_t，因此闲暇时间为$h_t - l_t$。

鲁滨逊可以消费的物品数量为：$c_t = y_t = f(l_t)$。（为什么？）

无论消费物品还是消费闲暇，都可给鲁滨逊带来效用，且物品边际效用、闲暇边际效用都为正，于是我们可设鲁滨逊有以下效用函数：

$$u_t = \tilde{u}\left(c_t, (h_t - l_t)\right) \tag{2.2}$$

假设 $MU_c = \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial c_t} > 0, MU_{h-l} = \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial (h_t - l_t)} > 0; \frac{\partial^2 \tilde{u}_t}{\partial c_t{}^2} < 0, \frac{\partial^2 \tilde{u}_t}{\partial (h_t - l_t)^2} < 0$，即物品和闲暇的边际效用都是正的（消费物品或闲暇越多，效用越高），但两种边际效用都是递减的（消费物品或闲暇越多，则边际效用越来越低，或效用的增加量越来越少）。

由于 h 是常数，因此鲁滨逊的效用函数也可写成如下形式：

$$u_t = u\left(c_t, l_t\right) \tag{2.3}$$

相 应 的 假 设 条 件 将 变 化 为 ：

$MU_c = \frac{\partial u_t}{\partial c_t} > 0, MU_l = \frac{\partial u_t}{\partial l_t} < 0; \frac{\partial^2 u_t}{\partial c_t^{\ 2}} < 0, \frac{\partial^2 u_t}{\partial l_t^{\ 2}} < 0$。这样的假设使得鲁滨逊的效用无差异曲线如图 2.5（无差异曲线形状为什么会如下图？请同学们依据此处的假设予以证明）。

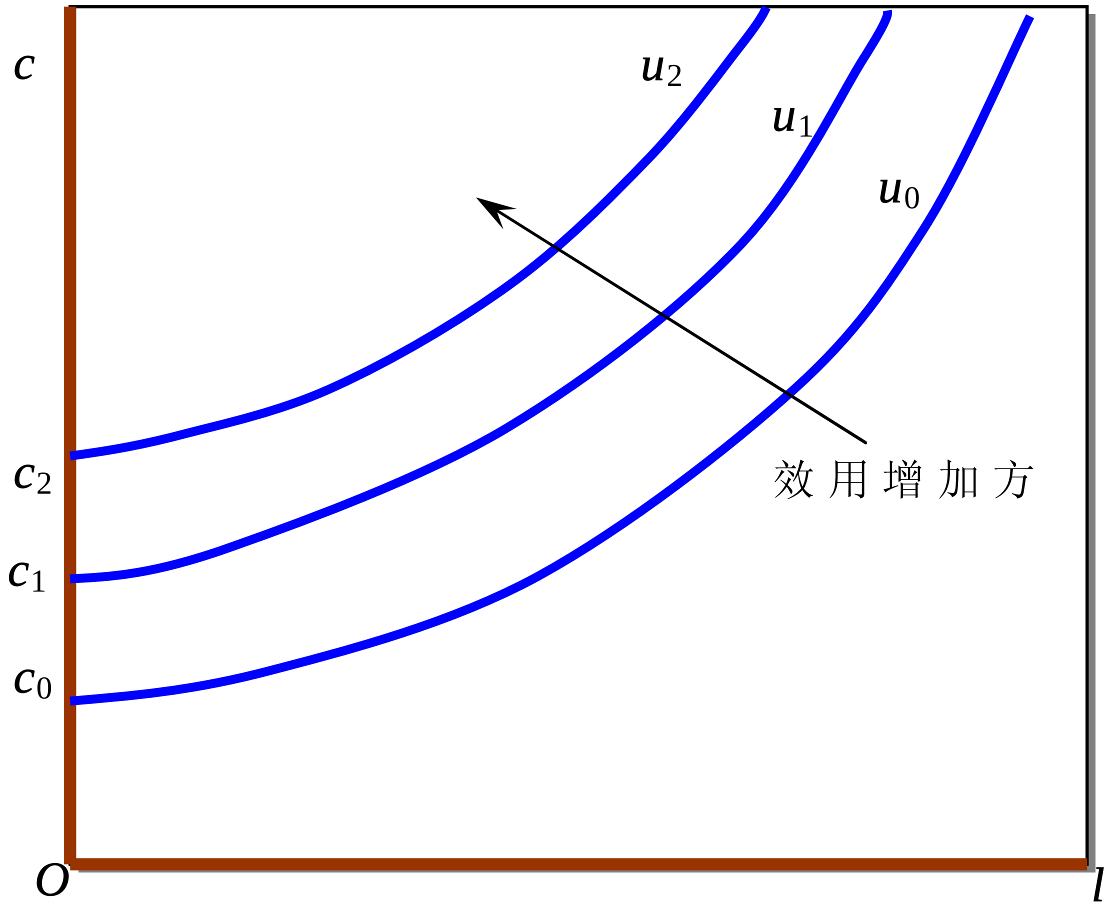


图 2.5 鲁滨逊的效用无差异曲线

工作决策

经济学研究的常常是面临二难冲突的选择问题。鲁滨逊面临的二难冲突问题是什么？一方面，他希望多消费物品（这意味着他要多工作多生产）；另一方面，他希望享受更多的闲暇（这意味着他要少工作）。所以，他面临的冲突是有限的可支配时间内既要多工作又要少工作。他要决定的是，究竟工作多长时间（享受闲暇多长时间），能够最大化自己的效用。因此鲁滨逊的问题可用如下规划问题表示（不影响理解我们省略了下标 t）：

$$\max_{l} u(c,l)$$
$$s.t. \quad c = Af(l)$$
$$l \leq h$$

另 h 足够大，以使得条件 $l \leq h$ 成立，这样可确保我们有内点解。那么，鲁滨逊的问题就转化为：

$$\max_{l} u(Af(l),l)$$

一阶条件（极值必要条件）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}(Af(l))}\cdot\frac{\mathrm{d}(Af(l))}{dl}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}=0 \tag{2.4}$$

改写为

$$MU_c\cdot Af'(l)+MU_l=0$$

进一步可改写为

$$-\frac{MU_l}{MU_c}=Af'(l) \tag{2.5}$$

即，满足式(2.5)的 l^* 将是鲁滨逊的最优工作时间（如果效用函数 u 关于 l 为凹函数的话）。现在我们检验函数 u 的凹性（即存在最大化解的二阶必要条件）。

根据式(2.4)一阶条件再求关于 l 的导数，即 $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}l$，为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\right)+Af''(l)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\right)+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}l^2}<0$$

容易验证上式在 $l>0$ 时会小于 0。[请回忆有假设：$\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}l^2<0$，$f''(l)<0$，因此上第 2、3 项均为负；而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\right)<0$（为什么？因为消费的边际效用递减，而劳动时间 l 的增加意味着消费物品的增加，因此消费的边际效用 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}l$ 将随 l 的增加而下降）[I]]因此，式(2.5)必对应于鲁滨逊的最大化效用解。

请注意到，边际替代率 $-\frac{MU_l}{MU_c}=\frac{\partial u/\partial l}{\partial u/\partial c}=\frac{\partial c}{\partial l}>0$ 正是图 2.5 中效用无差异曲线的斜率；$Af'(l)>0$ 正是图 2.1 中生产曲线的斜率。所以，鲁滨逊工作决策的均衡解条件就是其边际替代率（或无差异曲线的斜率）与劳动边际产品（生产曲线的斜率）刚好相等。如图 2.6。

[I] 这个结论也可以给予数学证明：已知 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}c^2}<0$，$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}l}>0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}c}\right)=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}l}<0$。

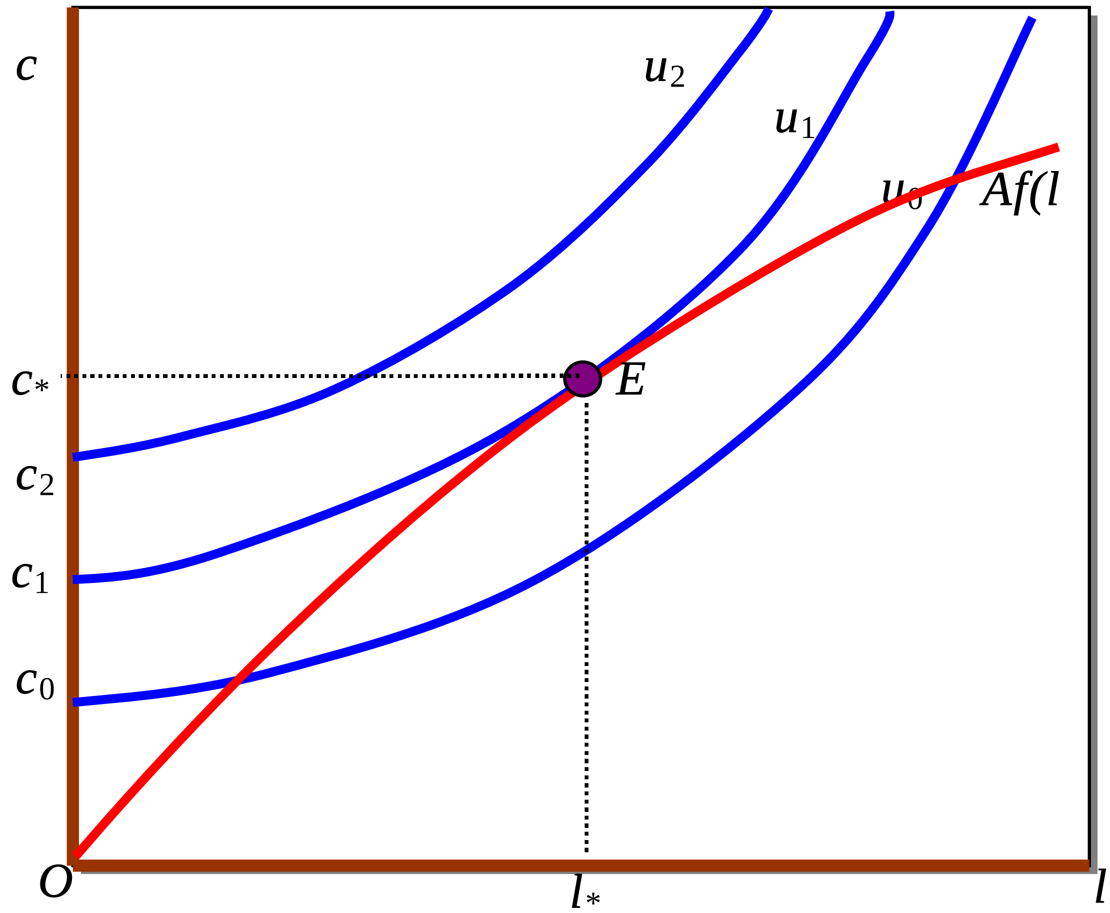


图 2.6 鲁滨逊的最优工作决策

说明：在均衡点 E，生产线的斜率与无差异曲线斜率相等。鲁滨逊最优工作时间 l^*，他能消费的物品为 $c^*=Af(l^*)$。他享受的闲暇为

2．3 各种因素对经济行为的影响

财富效应

假设有一天，突然有人从空中投放了大量食品给鲁滨逊。这意味着鲁滨逊在当期可消费的物品实质性地增加了。这种财富增加会怎样影响鲁滨逊的行为？我们可以这样分析：

鲁滨逊面临的规划问题变化为：

$$\max_{l} u(c+w, l)$$

约束条件并未发生变化（当然不会变化，因为鲁滨逊的唯一资源——可支配时间并没发生变化）。最优化的一阶条件将变化为：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}(Af(l)+w)} \cdot \frac{\mathrm{d}(Af(l)+w)}{\mathrm{d}l} \cdot + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = 0$$

或

$$-\frac{MU_l}{MU_{c+w}} = Af'(l) \tag{2.6}$$

即，财富增加后新的均衡解 l^{**}，应满足式(2.6)。与式(2.5)的解 l^{*} 比较，将有

$\boxed{\text{i 命题 2.1}}$：鲁滨逊财富增加($w>0$)，将导致他减少工作时间，即 $l^{**}<l^{*}$。

证明：使用反证法。假设 $l^{**}\geq l^{*}$，根据 $f'(l)<0, f''(l)<0$，有

$f'(l^{**})\leq f'(l^{*})$，即

$$\frac{-MU_{l^{**}}}{MU_{Af(l^{**})+w}} \leq \frac{-MU_{l^{*}}}{MU_{Af(l^{*})+w}} \tag{2.7}$$

因为 $MU_l<0$，$\partial\left(MU_l\right)/\partial l<0$，所以 $MU_{l^{**}}<MU_{l^{*}}<0$，或者

$$-MU_{l^{**}} > -MU_{l^*} > 0 \tag{2.8}$$

因为 $MU_c > 0$，$\partial(MU_c)/\partial c < 0$， $w > 0$，故 $Af(l^{**}) + w > Af(l^*)$，因此

$$0 < MU_{Af(l^{**})+w} < MU_{Af(l^*)} \tag{2.9}$$

式子(2.8)和(2.9)表明式(2.7)是不可能成立的。因此假设 $l^{**} \geq l^*$ 不成立，必有 $l^{**} < l^*$。QED.

命题 2.1 刻画了财富对工作时间的效应。它表明，**财富的实质性增加，会刺激人们减少工作时间**。

i **命题 2.2**：鲁滨逊财富增加($w > 0$)，导致他实际消费的财富增加了，即 $Af(l^{**}) + w > Af(l^*)$。

证明：一样地使用反证法。假设， $Af(l^{**}) + w \leq Af(l^*)$ ，故 $0 < MU_{Af(l^*)} < MU_{Af(l^{**})+w}$ （相当于把式(2.9)调整一下）。因为 $l^{**} < l^*$，故 $-MU_{l^*} > -MU_{l^{**}} > 0$。故有：

$$\frac{-MU_{l^{**}}}{MU_{Af(l^{**})+w}} \le \frac{-MU_{l^{*}}}{MU_{Af(l^{*})+w}} \qquad \text{(与式 2.7 同)}$$

即有：

$$f'(l^{**}) \le f'(l^{*})$$

但由于 $l^{**} < l^{*}$， $f'(l) < 0, f''(l) < 0$，故应有 $0 > f'(l^{**}) \ge f'(l^{*})$，上式与此假设矛盾。故，必有 $Af(l^{**}) + w > Af(l^{*})$。QED.

命题 2.1 刻画了财富对财富消费的效应。它表明，财富的实质性增加，会刺激人们增加财富消费。

图 2.7 是财富效应的图示，也可明确地看到命题 2.1 的结果。

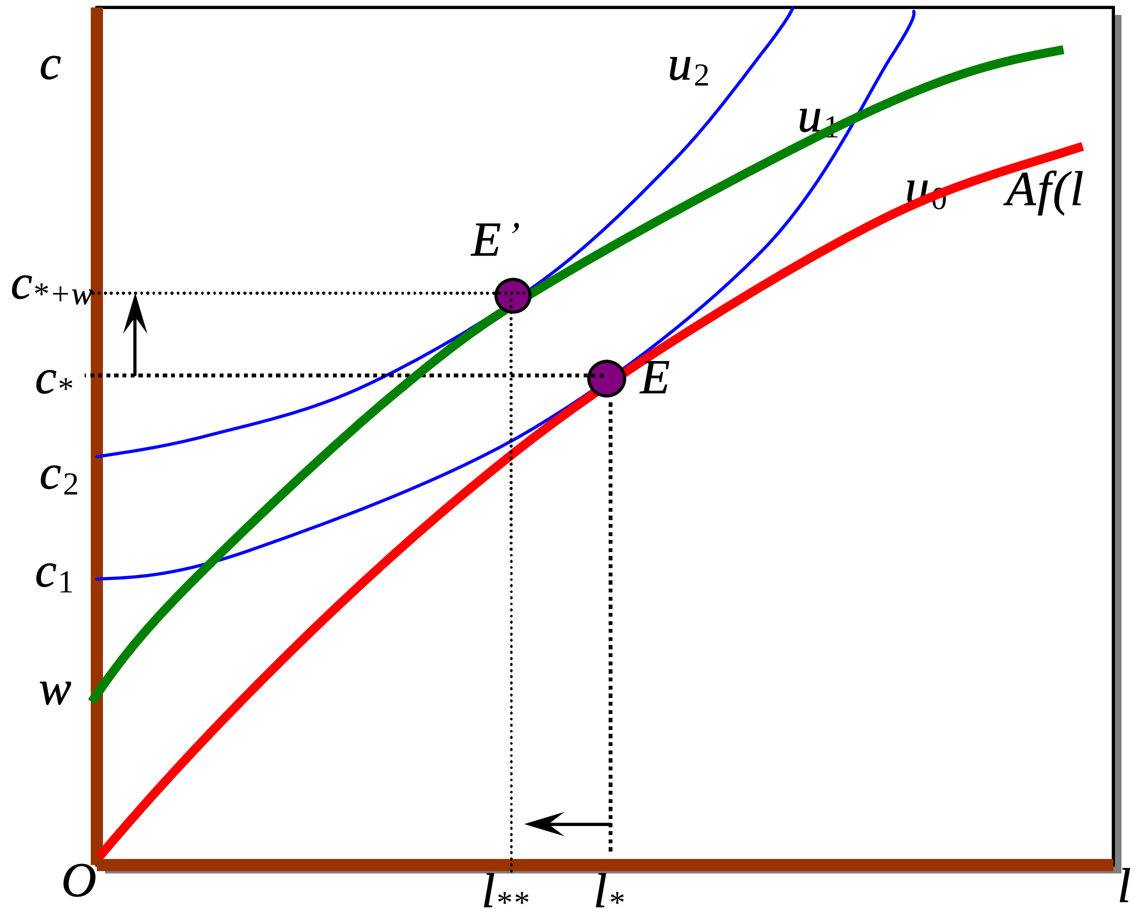


图 2.7 财富增加对鲁滨逊工作和消费决策的影响

说明：财富增加，导致均衡点从 E 移向 E’，鲁滨逊的工作时间减少，财富消费增加。

但是，我们有必要指出，这里得到的结论，与模型的假设是联系在一起的。即，我们假设了物品消费和闲暇，都是能够持续提高鲁滨逊的效用的，换句话说，物品和闲暇对于鲁滨逊都是**正常品**。不妨回忆微观经济学原理中，对正常品的定义正是收入效应为正的物品。如果遇见**劣质品**，则财富的增加将导致对物品的消费的减少。

从全球纵向和横向的经济现实来看，财富作为正常品比较容易理解。闲暇作为正常物品也能找到一些证据，比如：(1)从工业革命以来，人们的财富在增加，但是工作时间却在缩短；(2)发达的国家比发展中国家的人们更注重闲暇，他们周工作的时间也更短，休假时间也更多。

替代效应

替代效应，是家庭对可获得两种物品的相对价格做出的反应。分离替代效用的做法是，让一条新的具有新技术特征的生产线通过原来的消费和劳动组合点，看家庭会如何调整其消费与劳动。

对此不妨考虑，鲁滨逊原来的效用水平是$u(Af(l^*),l^*)$，现在技术进步了，他仍可以选择l^*，但效用水平变化为$u(\tilde{A}f(l^*),l^*)$，由于技术进步意味着$\tilde{A}>A$，而$u_A>0$，因此$u(\tilde{A}f(l^*),l^*)>u(Af(l^*),l^*)$，定义劳动量不变下的产出增加为财富变动，那么财富变化为$\Delta Af(l^*)$，$\Delta A=\tilde{A}-A$。纯粹分离替代效应，就需要考虑扣除这部分财富的影响，相当于在新的生产函数上扣减一个产量$\Delta Af(l^*)$，及用于辅助说明替代效应的生产函数是：

$$\bar{A}f(l)=\tilde{A}f(l)-\Delta Af(l^*)$$

这个函数一定满足：在$l=l^*$时，$\bar{A}f(l^*)=\tilde{A}f(l^*)-(\tilde{A}-A)f(l^*)=Af(l^*)$。而$\bar{A}f(l)$与效用函数相切，切点对应的劳动量和财富（产量）就是替代效应产生的结果。

可以证明如下两命题成立（有兴趣的同学可尝试证明）。

i **命题 2.3**：技术进步后，替代效应使鲁滨逊增加工作时间投入，即以劳动替代闲暇。

i **命题 2.4**：技术进步后，替代效应使鲁滨逊的财富消费量增加，其生

活水准得到了改善。

虽然我们没提供证明，但从图形（图 2.7）上可以非常直观地看到上述结论。

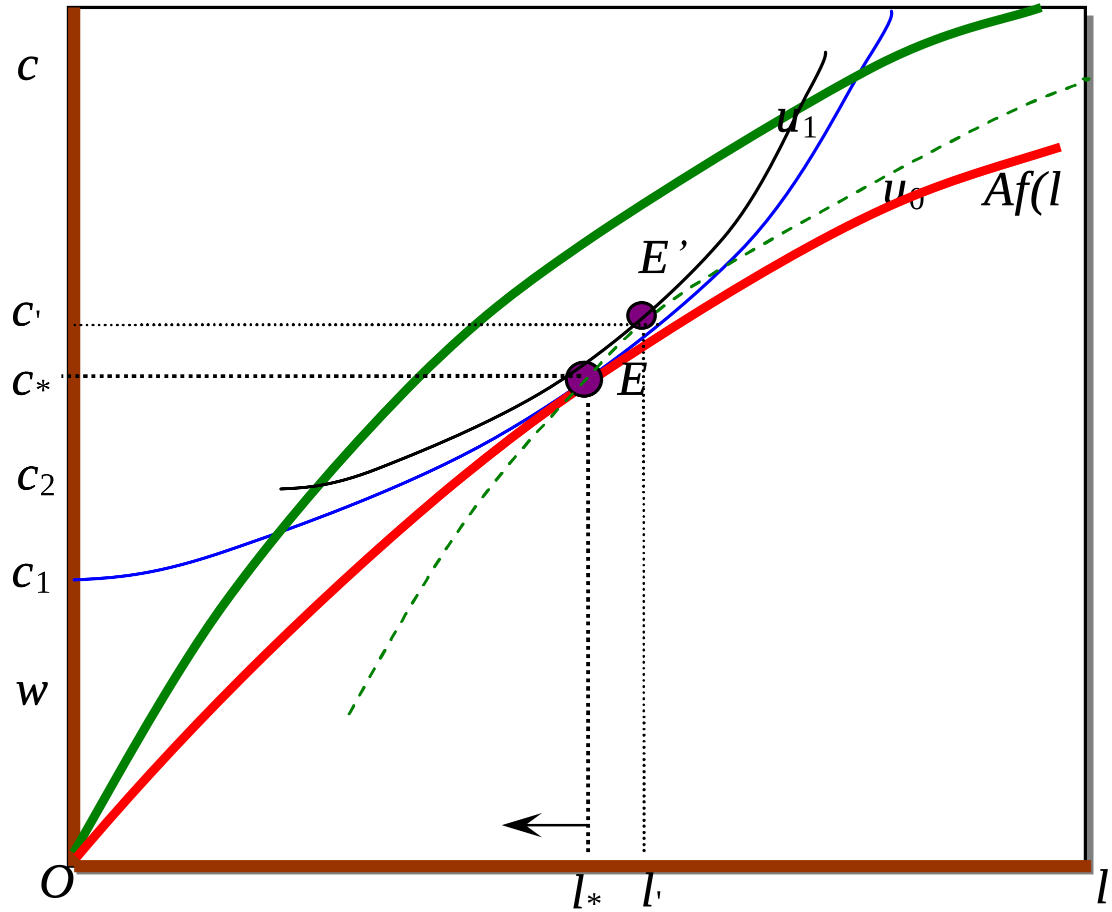


图 2.7 技术进步产生的替代效应

说明：因为技术进步，替代效应使鲁滨逊增加工作时间（替代闲暇），其财富消费量增加。

同时考虑财富效应和替代效应

通过命题 2.2 和 2.4，我们可以知道，技术进步带来的替代效应和财富效应都会带来财富消费的增加。而通过命题 2.1 和 2.3，我们知道技术进步的财富效应会减少工作时间，而其替代效应会增加工作时间，所以技术进步对于工作时间的影响并不是确定的。影响的结果如何取决于两种效应的大小。

图 2.8(a)(b)表示了两种不同的情况。

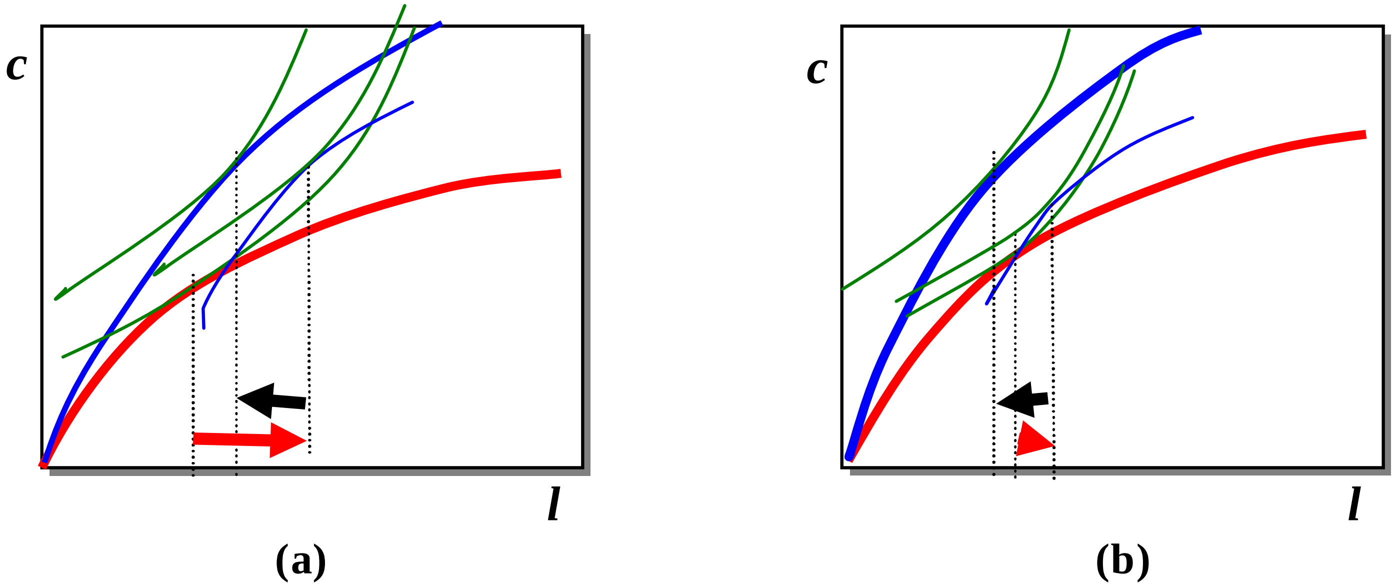


图 2.8 技术进步的财富效应和替代效应

说明：红色箭头是替代效应，黑色箭头是财富效应。(a)种替代效应大于财富效应，(b)中替代效应小于财富效应。

在数学技术上，也可以推导技术进步的替代效应和财富效应。具体地，有

$$\underbrace{\frac{\partial u(c,l)}{\partial A}}_{TE} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial A}}_{WE} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial A}}_{SE}$$

其中财富效应 WE 将为正（因为 $\partial u / \partial c > 0, \partial c / \partial A > 0$），$\partial u / \partial l < 0, \partial l / \partial A > 0$（命题 2.3），故 SE 为负。

例：在鲁滨逊经济中，鲁滨逊效用函数为 $u = c^{0.5}(16 - l)^{0.5}$，$l \in [0,16]$ 生产函数为 $y = 2\sqrt{l}$，

1) 请问鲁滨逊消费和闲暇达到均衡时的工作时间量和财富消费量为多少？
2) 若技术进步，技术系数从 2 提升到 4，新的工作时间量和财富消费量是多少？
3) 技术进步对工作时间的总效应是多少？其中财富效应和替代效应各是多少？
4) 若不考虑技术进步，而只考虑财富增加 2 单位，则鲁滨逊的最佳工作

时间比财富增加前有什么变化，财富效应在消费量和工作时间上如何表现？

解：1) 鲁滨逊将最大化如下目标函数

$$\max_{l}\left\{(2\sqrt{l})^{0.5}(16-l)^{0.5}\right\}，\quad l\in[0,16]$$

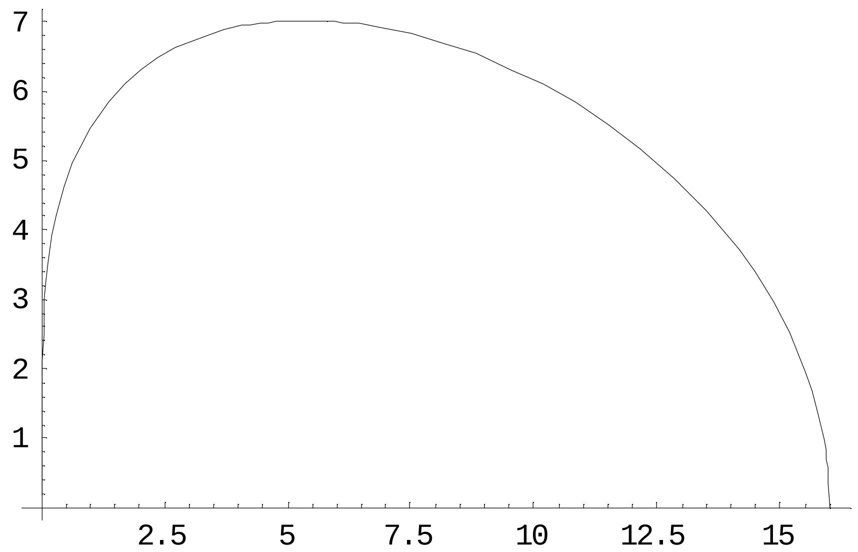
一阶条件：$\dfrac{16\sqrt{2}-3\sqrt{2}l}{4\sqrt{16-l}l^{\frac{3}{4}}}=0$

解得：$l^{*}=\dfrac{16}{3}\approx 5.33$

从而，$c^{*}=y^{*}\approx 4.617$，$u^{*}=\dfrac{16}{3^{3/4}}\approx 7.02$

[当然，从谨慎的角度，我们应检验目标函数是否是凹函数。可以运用二阶条件验证，在定义域内目标函数的确为凹（请同学们自己验证），其图形如

下]



2) 技术从 2 提升到 4，鲁滨逊最大化效用函数变化为

$$\max_{l}\left\{(4\sqrt{l})^{0.5}(16-l)^{0.5}\right\}, \quad l\in[0,16]$$

一阶条件：$\dfrac{16-3l}{2\sqrt{16-l}\,l^{\frac{3}{4}}}=0$

解得：$l^{**}=\dfrac{16}{3}\approx 5.33$

从而，$c^{**}=y^{**}\approx 9.235$，$u^{**}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3^{3/4}}\approx 9.92$

3) 技术进步对工作时间的总效用为 0（因为从问题 1 和问题 2 中可发现，工作时间没有变化）。其中替代效应和财富效应可按如下计算如下：

- 新的生产函数为：$y=4\sqrt{l}$
- 维持原工作时间 $l^{*}=16/3$ 不变，相当于财富增加 $\Delta Af(l^{*})=(4-2)\sqrt{16/3}=8/\sqrt{3}$
- 那么分离替代效应的辅助性生产函数为：$\bar{y}=4\sqrt{l}-8/\sqrt{3}$
- 计算替代效应的均衡点：

$$\max_{l}\left\{(4\sqrt{l}-8/\sqrt{3})^{0.5}(16-l)^{0.5}\right\},l\in[0,16]$$

一阶条件：$\dfrac{16\sqrt{3}+4\sqrt{l}-3\sqrt{3}l}{2\sqrt{3\sqrt{l}-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(16-l)l}}=0$

解得：$l^{***}=\dfrac{8}{27}(19+\sqrt{37})\doteq 7.43$

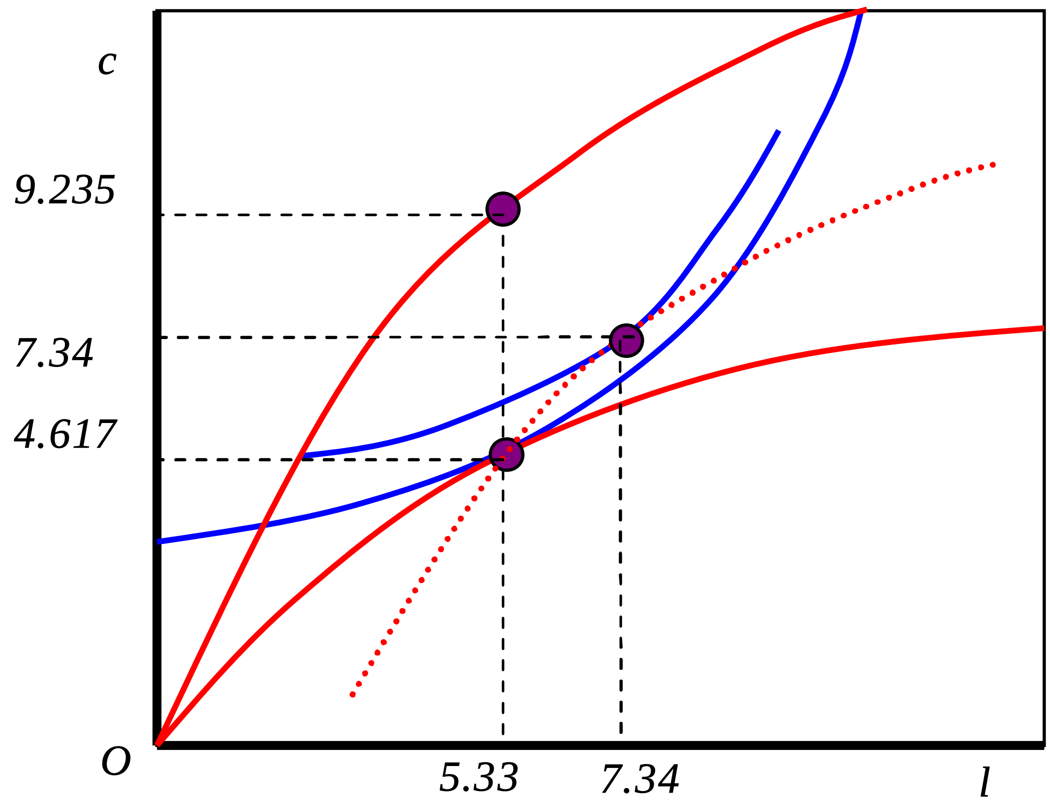
从而：$c^{***}=y^{***}\approx 7.34$

由此可以计算技术进步的各种效应：

- 替代效应(对工作时间)：$l^{***}-l^{*}=7.34-5.33=2.01$
- 财富效应(对工作时间)：$0-2.01=-2.01$ (这里利用了工作时间总效应为 0 的结果)
- 替代效应(对财富消费量)：$y^{***}-y^{**}=7.34-4.617=2.723$
- 财富效应(对财富消费量)：

$$\underbrace{(y^{**}-y^{*})}_{TE\text{财富增量}}-\underbrace{(y^{***}-y^{**})}_{SE\text{财富增量}}=(9.235-4.617)-2.723=1.895$$

总结起来，技术进步(技术系数 2 à 4)通过替代效应，增加了鲁滨逊劳动时间 2.01 小时，增加财富消费量 2.723 单位；通过财富效应，减少了鲁滨逊工作时间 2.01 小时，增加了财富消费量 1.895 单位。结果总效应是,；鲁滨逊工作时间保持原来的 5.33 小时不变，但财富消费量增加了一倍（4.618 单位，这是由于计算误差，理论上他的工作时间不变而技术系数翻番，其财富应刚好翻一倍）。



4) 鲁滨逊最大化效用函数变化为

$$\max_{l}\left\{(2\sqrt{l}+2)^{0.5}(16-l)^{0.5}\right\},\quad l\in[0,16]$$

一阶条件：$\dfrac{16\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{l}-3\sqrt{2}l}{4\sqrt{1+\sqrt{l}}\sqrt{16-l}\sqrt{l}}=0$

解得：$l^{*}=4$

财富消费量：$c=y=2\sqrt{4}+2=6$

财富增加导致工作时间下降，而财富消费量增加了。至于图示，请同学们自己完成。